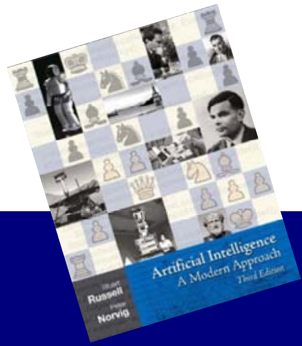


Umělá inteligence II

2

Roman Barták, KTIML

roman.bartak@mff.cuni.cz
http://ktiml.mff.cuni.cz/~bartak

Pro zopakování

- **Pravděpodobnost** je formální mechanismus pro zachycení **neurčitosti**.
- Pravděpodobnost každé atomické události zachycuje **úplná sdružená distribuce**.
- Odpověď můžeme získat vyščítáním přes atomické události (elementární jevy) odpovídající pozorování.
- Pro větší problémy ale bude potřeba efektivnější přístup.
- Hodit se nám bude **nezávislost** a **podmíněná nezávislost**.

Příklad na úvod

- A zase ten Wumpus!

1,4	2,4	3,4	4,4
1,3	2,3	3,3	4,3
1,2 B OK	2,2	3,2	4,2
1,1 OK	2,1 B OK	3,1	4,1

- V bludišti se nachází díry, které se poznají podle vánku v okolní buňce (Wumpuse a zlato tentokrát neuvažujeme).
- Kam máme jít, když na (1,2) a (2,1) cítíme vánek?
- Logické odvození nepotvrdí bezpečnost žádné buňky!

Na kterou buňku máme jít?

Wumpus

pravděpodobnostní model

1,4	2,4	3,4	4,4
1,3	2,3	3,3	4,3
1,2 B OK	2,2	3,2	4,2
1,1 OK	2,1 B OK	3,1	4,1

- **Booleovské proměnné**:
  - $P_{i,j}$ – na buňce (i,j) je díra
  - $B_{i,j}$ – na buňce (i,j) je cítit vánek (zahrneme pouze proměnné $B_{1,1}$, $B_{1,2}$ a $B_{2,1}$.
- **Úplná sdružená distribuce**

$\mathbf{P}(P_{1,2},\ldots,P_{4,4},B_{1,1},B_{1,2},B_{2,1})$

$= \mathbf{P}(B_{1,1},B_{1,2},B_{2,1} \mid P_{1,2},\ldots,P_{4,4}) * \mathbf{P}(P_{1,2},\ldots,P_{4,4})$

součinové pravidlo

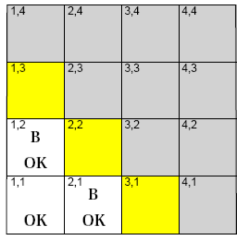
$\mathbf{P}(P_{1,2},\ldots,P_{4,4}) = \Pi_{i,j}\ \mathbf{P}(P_{i,j})$

díry jsou rozmístěny nezávisle

$\mathbf{P}(P_{1,2},\ldots,P_{4,4}) = 0.2^n * 0.8^{16-n}$

bereme-li pravděpodobnost díry 0.2 a *n* děr

Wumpus
dotaz a odpověď enumerací



Známe následující **fakta**:

$b = \neg b_{1,1} \wedge b_{1,2} \wedge b_{2,1}$

$known = \neg p_{1,1} \wedge \neg p_{1,2} \wedge \neg p_{2,1}$

Zajímá nás **dotaz P**($P_{1,3}$ | known, b).

Odpověď snadno zjistíme enumerací úplné sdružené distribuce

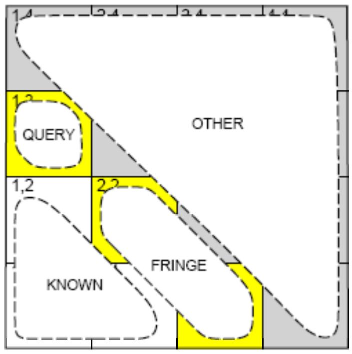
nechť Unknown = proměnné $P_{i,j}$ kromě $P_{1,3}$ a Known

$P(P_{1,3} \mid known, b)$
$= \Sigma_{unknown} P(P_{1,3}, unknown, known, b)$

To ale znamená prozkoumat všechna ohodnocení proměnných Unknown a těch je $2^{12} = 4096$.

Nejde to udělat lépe (rychleji)?

Wumpus
podmíněná nezávislost



Pozorování:

- pozorování vánku je podmíněně nezávislé na ostatních skrytých buňkách (šedé) pokud jsou dány sousední skryté buňky (žluté)

Rozdělíme skryté buňky na sousedy a ostatní buňky

Unknown = Fringe ∪ Other

Z podmíněné nezávislosti dostaneme:

$P(b \mid P_{1,3}, known, unknown) = P(b \mid P_{1,3}, known, fringe)$

A teď tento vztah pouze vhodně použijeme.

Wumpus
využití podmíněné nezávislosti

$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid \text{known}, b)$

$= \alpha\ \Sigma_{\text{unknown}}\ \mathbf{P}(P_{1,3}, \text{known}, \text{unknown}, b)$

součinové pravidlo $\mathbf{P}(X,Y) = \mathbf{P}(X|Y)\ \mathbf{P}(Y)$

$= \alpha\ \Sigma_{\text{unknown}}\ \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, \text{known}, \text{unknown}) * \mathbf{P}(P_{1,3}, \text{known}, \text{unknown})$

$= \alpha\ \Sigma_{\text{fringe}}\Sigma_{\text{other}}\ \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, \text{known}, \text{fringe}, \text{other}) * \mathbf{P}(P_{1,3}, \text{known}, \text{fringe}, \text{other})$

$= \alpha\ \Sigma_{\text{fringe}}\Sigma_{\text{other}}\ \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, \text{known}, \text{fringe}) * \mathbf{P}(P_{1,3}, \text{known}, \text{fringe}, \text{other})$

$= \alpha\ \Sigma_{\text{fringe}}\ \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, \text{known}, \text{fringe}) * \Sigma_{\text{other}}\ \mathbf{P}(P_{1,3}, \text{known}, \text{fringe}, \text{other})$

$= \alpha\ \Sigma_{\text{fringe}}\ \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, \text{known}, \text{fringe}) * \Sigma_{\text{other}}\ \mathbf{P}(P_{1,3})P(\text{known})P(\text{fringe})P(\text{other})$

$= \alpha\ P(\text{known})\mathbf{P}(P_{1,3})\ \Sigma_{\text{fringe}}\ \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, \text{known}, \text{fringe})\ P(\text{fringe})\ \Sigma_{\text{other}}\ P(\text{other})$

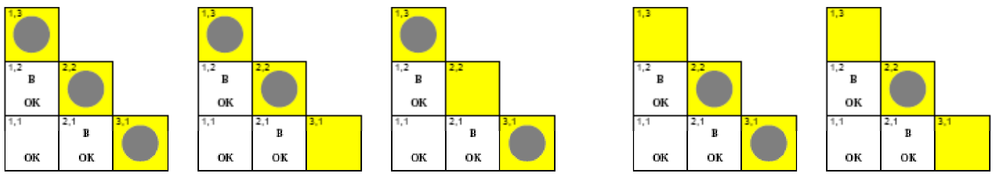
$= \alpha'\ \mathbf{P}(P_{1,3})\ \Sigma_{\text{fringe}}\ \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, \text{known}, \text{fringe})\ P(\text{fringe})$

$\alpha' = \alpha.\ P(\text{known})$
$\Sigma_{\text{other}}\ P(\text{other}) = 1$

Wumpus
Kam teď máme jít?

$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid \text{known}, b) = \alpha'\ \mathbf{P}(P_{1,3})\ \Sigma_{\text{fringe}}\ \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, \text{known}, \text{fringe})\ P(\text{fringe})$

Teď prozkoumáme možné modely pro Fringe, které jsou kompatibilní s pozorováním b.



0.2 x 0.2 = 0.04 | 0.2 x 0.8 = 0.16 | 0.8 x 0.2 = 0.16 | 0.2 x 0.2 = 0.04 | 0.2 x 0.8 = 0.16

$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid \text{known}, b)$

$= \alpha' \langle 0.2\ (0.04 + 0.16 + 0.16),\ 0.8\ (0.04 + 0.16) \rangle$

$= \langle 0.31, 0.69 \rangle$

$\mathbf{P}(P_{2,2} \mid \text{known}, b) = \langle 0.86, 0.14 \rangle$

Určitě se tedy vyhneme buňce (2,2)!

Diagnostické systémy

- Podívejme se ještě jednou na diagnostiku.
- Zpravidla nám jde o odhalení zdrojů problému podle symptomů.
  - zajímá nás tedy P(disease|symptoms) tj. **diagnostický směr**
- Z analýzy předchozích nemocí, poruch, … máme ale k dispozici jiné údaje
  - pravděpodobnost nemoci P(disease)
  - pravděpodobnost symptomu P(symptom)
  - **kauzální vztah** nemoci a symptomu P(symptoms|disease)
- **Jak je využít?**

Bayesovo pravidlo

- Víme, že platí
  $P(a \wedge b) = P(a|b)\, P(b) = P(b|a)\, P(a)$
- Můžeme odvodit tzv. **Bayesovo pravidlo** (vzorec):
  $P(a|b) = P(b|a)\, P(a) / P(b)$
  v obecné podobě:

$$\mathbf{P}(Y|X) = \mathbf{P}(X|Y)\, \mathbf{P}(Y) / \mathbf{P}(X) = \alpha\, \mathbf{P}(X|Y)\, \mathbf{P}(Y)$$

- To na první pohled vypadá jako krok zpět, protože potřebujeme znát $\mathbf{P}(X|Y)$, $\mathbf{P}(Y)$, $\mathbf{P}(X)$.
- Často, ale právě tato čísla máme k dispozici.
  P(cause|effect) = P(effect|cause) P(cause) / P(effect)
  - P(effect|cause) popisuje **kauzální vazbu**
  - P(cause|effect) popisuje **diagnostickou vazbu**

Bayesovo pravidlo
příklad použití

- **Diagnostika v medicíně**
  - z předchozích případů známe P(symptoms|disease), P(disease), P(symptoms)
  - u nového pacienta známe symptomy a hledáme nemoc P(disease|symptoms)
- **Příklad:**
  - meningitida způsobuje ztuhlou šíji u 70% procent pacientů
  - pravděpodobnost meningitidy je 1/50 000
  - pravděpodobnost ztuhlé šíje je 1%

  Jaká je pravděpodobnost, že pacient se ztuhlou šíjí má meningitidu?

  $P(m|s) = P(s|m).P(m) / P(s) = 0.7 * 1/50000 / 0.01 = 0.0014$

  Proč ne přímo?
  - diagnostická vazba je citlivější než kauzální vazba
  - pokud například vypukne epidemie meningitidy, bude hodnota přímé diagnostické vazby jiná, v našem vzorci ale stačí aktualizovat hodnotu P(m)

Bayesovo pravidlo
spojování pozorování

- Co když máme k dispozici více pozorování?
- Můžeme využít podmíněnou nezávislost

$$\mathbf{P}(\text{Toothache},\text{Catch},\text{Cavity})$$
$$= \mathbf{P}(\text{Toothache}|\text{Cavity})\ \mathbf{P}(\text{Catch}|\text{Cavity})\ \mathbf{P}(\text{Cavity})$$

Pokud jsou všechny efekty podmíněně nezávislé při dané příčině, dostaneme

$$\mathbf{P}(\text{Cause},\text{Effect}_1,\ldots,\text{Effect}_n)$$
$$= \mathbf{P}(\text{Cause})\ \Pi_i\ \mathbf{P}(\text{Effect}_i|\text{Cause})$$

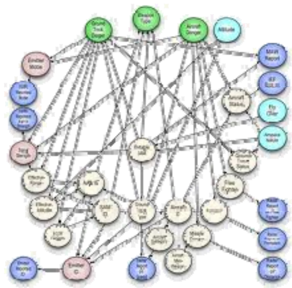
Jedná se o často používaný tzv. **naivní Bayesův model** (používá se, i když neplatí podmíněná nezávislost).

Reprezentace znalostí
s nejistotou

- Víme, že **úplná sdružená distribuce** poskytuje kompletní informaci pro výpočet libovolné pravděpodobnosti metodou **marginalizace** (vysčítáním).
- Jedná se ale o metodu paměťově a časově náročnou ($O(d^n)$ pro n náhodných proměnných s d hodnotami).

Jak to udělat lépe?

Nápověda:
využijeme podmíněné nezávislosti

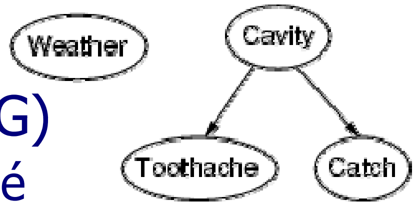


Další program

- **Bayesovské sítě**
  - efektivní způsob reprezentace podmíněných pravděpodobností a nezávislostí
- **Sémantika** sítě
  - vztah k úplné složené distribuci
- **Konstrukce** sítě
- **Odvozování** v Bayesovských sítích
  - exaktní metody
    - enumerace, eliminace proměnných
  - aproximační metody
    - vzorkovací (samplovací) techniky

Bayesovská síť

- zachycuje **závislosti mezi náhodnými proměnnými**
- orientovaný acyklický graf (DAG)
  - uzel odpovídá náhodné proměnné
  - předchůdci uzlu v grafu se nazývají rodiče
  - každý uzel má přiřazenu tabulku podmíněné pravděpodobnostní distribuce **P**(X | Parents(X))



- jiné názvy
  - belief network, probabilistic network, causal network (spec. případ BS), knowledge map

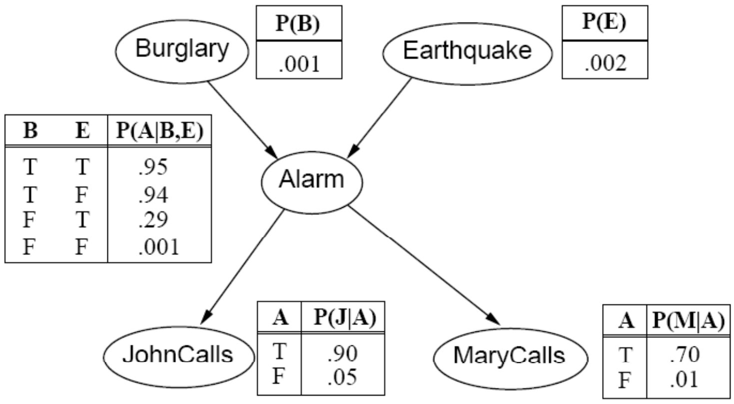
Bayesovská síť

modelová situace

- Máme v domě zabudovaný **alarm**, který spustí při **vloupání** ale někdy také při **zemětřesení**.
- Sousedi Mary a John slíbili, že vždy, když alarm uslyší, tak nám **zavolají**.
  - John volá skoro vždy, když slyší alarm, ale někdy si ho splete s telefonním zvoněním
  - Mary poslouchá hlasitou hudbu a někdy alarm přeslechne
- Zajímá nás **pravděpodobnost vloupání, pokud John i Mary volají**.
- Další předpoklady:
  - sousedi přímo nevidí vloupání ani necítí zemětřesení
  - sousedi se nedomlouvají (volají nezávisle na sobě)

Bayesovská síť
příklad

- **Náhodné Booleovské proměnné** reprezentují možné události.
  - některé události (zvonění telefonu, přelet letadla, vadu alarmu …) ignorujeme
- **pravděpodobnostní tabulky** reprezentují vztah podmíněné pravděpodobnosti
  - stačí reprezentovat hodnoty true



Sémantika sítě

- Bayesovská sít kompaktním způsobem reprezentuje úplnou sdruženou distribuci.

  $P(x_1,\dots,x_n) = \Pi_i \, P(x_i \mid parents(X_i))$

- Zpětně lze ukázat, že tabulky **P**(X | Parents(X)) jsou podmíněné pravděpodobnosti podle nahoře definované úplné sdružené distribuce.
- Protože úplnou sdruženou distribuci lze použít pro odpověď na libovolnou otázku v dané doméně, lze stejnou odpověď získat z Bayesovské sítě (marginalizací).

Konstrukce sítě

Jak konstruovat Bayesovské sítě?

Nápovědu nám dává vztah

$P(x_1,\dots,x_n) = \Pi_i\, P(x_i \mid parents(X_i))$

a rozepsání $P(x_1,\dots,x_n)$ řetězcovým pravidlem

$P(x_1,\dots,x_n) = \Pi_i\, P(x_i \mid x_{i-1},\dots,x_1)$.

Dohromady dostaneme

$\mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i)) = \mathbf{P}(X_i \mid X_{i-1},\dots,X_1)$

za předpokladu $Parents(X_i) \subseteq \{X_{i-1},\dots,X_1\}$, což platí pokud je očíslování uzlů konzistentní s uspořádáním uzlů v síti.

Konstrukce sítě
algoritmus

- **Uzly:**
  rozhodněte, jaké náhodné proměnné jsou potřeba a uspořádejte je
  - funguje libovolné uspořádání, ale pro různá uspořádání dostaneme různě kompaktní sítě
  - doporučené uspořádání je takové, kdy příčiny předcházejí efekty
- **Hrany:**
  bereme proměnné X_i v daném pořadí od 1 po n
  - v množině $\{X_1,\dots,X_{i-1}\}$ vybereme nejmenší množinu rodičů X_i tak, že platí $\mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i)) = \mathbf{P}(X_i \mid X_{i-1},\dots,X_1)$
  - z rodičů vedeme hranu do X_i
  - vypočteme podmíněné pravděpodobnostní tabulky $\mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i))$

Vlastnosti:

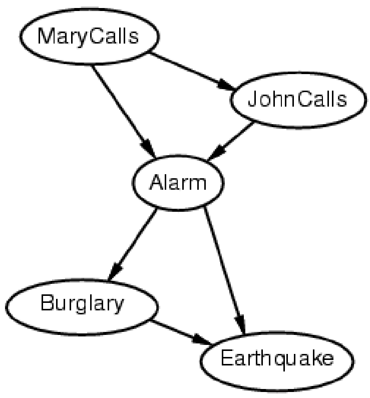
- síť je z principu konstrukce acyklická
- sít neobsahuje redundantní informaci a tudíž je vždy konzistentní (splňuje axiomy pravděpodobnosti)

Konstrukce sítě
poznámky

- Bayesovská síť může být mnohem **kompaktnější** než úplná sdružená distribuce, pokud je síť řídká (je lokálně strukturovaná).
  - náhodná proměnná často přímo závisí jen na omezeném počtu jiných proměnných
  - nechť je takových proměnných k a všech proměnných je n, potom potřebujeme prostor
    - $n.2^k$ pro Bayesovskou síť
    - 2^n pro úplnou sdruženou distribuci
  - můžeme **ignorovat „slabé“ vazby**, čímž budeme mít menší přesnost reprezentace, ale reprezentace bude kompaktnější
    - např. to, zda Mary nebo John zavolají není přímo ovlivněno zemětřesením, ale pouze alarmem
  - samozřejmě kompaktnost sítě hodně závisí na **vhodném uspořádání proměnných**

Konstrukce sítě
příklad

- Nechť jsme zvolili pořadí MarryCalls, JohnCalls, Alarm, Burglary, Earthquake
  - MarryCalls nemá rodiče
  - pokud volá Marry, je zřejmě aktivní alarm, což ovlivňuje Johnovo zavolání
  - Alarm asi zní, pokud volá Marry nebo John
  - pokud známe stav Alarmu, tak vloupání nezávisí na tom, zda volá Marry ani John



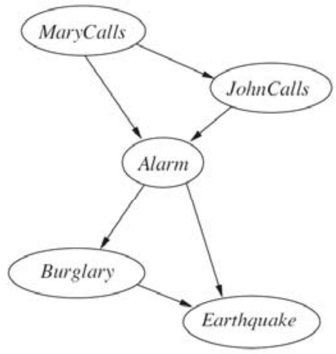
P(Burglary | Alarm, JohnCalls, MarryCalls) = P(Burglary | Alarm)

  - Alarm je svým způsobem detektor pro zemětřesení, ale pokud došlo k vloupání, tak pravděpodobně nebylo zemětřesení

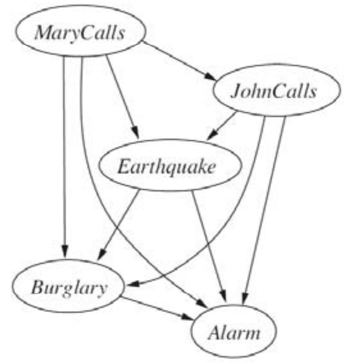
Konstrukce sítě

uspořádání proměnných

- Máme sice jen dvě hrany navíc oproti původnímu návrhu, ale problém je vyplnění tabulek podmíněných závislostí.
  - stejný problém jako u kauzální vs. diagnostické vazby
  - je lepší se držet kauzální vazby (příčina před následkem)
    - dává menší sítě a je snazší vyplnit tabulky podmíněných závislostí



- Při „špatném“ uspořádání proměnných nemusíme nic uspořit vzhledem k úplné sdružené distribuci
  - MaryCalls, JohnCalls, Earthquake, Burglary, Alarm



Podmíněná nezávislost

- Zatím jsme se dívali na sémantiku Bayesovských sítí **globálně** (ve vztahu k úplné sdružené distribuci).
  - hodí se pro konstrukci sítí
- Můžeme se na síť podívat **lokálně** a uvědomit si, že

proměnná je podmíněně nezávislá na uzlech, které nejsou její potomci, pokud známe rodiče

proměnná je podmíněné nezávislá na ostatních uzlech sítě, pokud známe rodiče, děti a rodiče dětí (tzv. **Markovský obal** proměnné)