Řešení písemky z Automatů a gramatik z 10:40-12:10, středy 7.5.2003:

1) "sloveso" redukovaný konečný automat přijímající jazyk slov nad abecedou $\{a, b\}$ obsahujících $abba$ a neobsahujících $baab$:

Automat *abba* (s důkazem redukce):

| | | $a$ | | $b$ | | $\sim_0$ | $a$ | $\sim_1$ | $b$ | $\sim_2$ | $b$ | $\sim_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\to \lambda$ | 0 | $a$ | 1 | $\lambda$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | 1 | $a$ | 1 | $ab$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| $ab$ | 2 | $a$ | 1 | $abb$ | 3 | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | | |
| $abb$ | 3 | $abba$ | 4 | $\lambda$ | 0 | 0 | 4 | 3 | | | | |
| $\leftarrow abba$ | 4 | $abba$ | 4 | $abba$ | 4 | 4 | | | | | | |

Rozdílový automat (s důkazem redukce):

| | $a$ | $b$ | $\sim_0$ | $a$ | $b$ | $\sim_1$ | $a$ | $b$ | $\sim_2$ | $a$ | $b$ | $\sim_3$ | $a$ | $b$ | $\sim_4$ | $a$ | $b$ | $\sim_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\to$ 00 | 10 | 01 | **00** | **00** | **00** | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | **10** | 00 | 00 | 10 | 00 | 00 |
| 10 | 10 | 21 | **00** | **00** | **00** | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | **21** | **10** | **10** | 21 | 10 | | | |
| 01 | 12 | 01 | **00** | **00** | **00** | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | **10** | 00 | 00 | **12** | 00 | **01** |
| 21 | 12 | 31 | **00** | **00** | **00** | 00 | 00 | **31** | **21** | | | | | | | | | |
| 12 | 13 | 21 | **00** | **00** | **00** | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | **21** | **10** | 00 | 21 | **12** | | | |
| 31 | 42 | 01 | **00** | **42** | **00** | **31** | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 10 | $\star$4 | **00** | **00** | **00** | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | **10** | 00 | 00 | 10 | **$\star$4** | **13** |
| $\leftarrow$ 42 | 43 | 41 | **42** | **42** | **42** | 42 | **43** | 42 | 42 | | | | | | | | | |
| $\star$4 | $\star$4 | $\star$4 | **00** | **00** | **00** | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | **$\star$4** | | | |
| $\leftarrow$ 43 | 40 | $\star$4 | **42** | **42** | **00** | **43** | | | | | | | | | | | | |
| $\leftarrow$ 41 | 42 | 41 | **42** | **42** | **42** | 42 | 42 | 42 | **41** | 42 | **41** | 41 | | | | | | |
| $\leftarrow$ 40 | 40 | 41 | **42** | **42** | **42** | 42 | 42 | 42 | **41** | **41** | **41** | **40** | | | | | | |

2) Zařaďte do Chomskiho hierarchie jazyk slov tvaru $bu$, kde $\exists k$, $b$ je binární zápis čísla $k$ a $u$ je $\sharp^k$ (unární zápis čísla $k$):

Zkoumaný jazyk $L$ patří do $\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2$:

Do $\mathcal{L}_2$ nemůže $L$ patřit, protože pro dostatečně velké $k > 2$ jsou splněny ostatní předpoklady pumping lemmatu a tedy za předpokladu bezkontextovosti $bu = v_1v_2v_3v_4v_5$, $|v_2v_4| > 0$ a $v_1v_2^kv_3v_4^kv_5 \in L$. Slovo $v_1v_2^kv_3v_4^kv_5$ je tedy tvaru $(0+1)^\star\sharp^\star$. Protože $|v_2v_4| > 0$, buď $b$ nebo $u$ v $v_1v_2^kv_3v_4^kv_5$ vzrostlo. Vzhledem k zachování rovnosti musely vzrůst obě. Číslo odpovídající $u$ může být nejvýš $k^2$. Číslo odpovídající $b$ je větší než $2^k > k^2$, což je spor odvozený z předpokladu bezkontextovosti.

Příslošnost $L$ do $\mathcal{L}_1$ prokážeme pomocí monotónní gramatiky, která jazyk generuje:

$S \to 0 \mid \hat{1}\,\overline{\sharp}$; $\quad \hat{1}\,\overline{\sharp} \to \hat{1}\,\overline{0}\,\overline{\sharp}\,\sharp$; $\quad \overline{0}\,\overline{\sharp} \to \overline{1}\,\overline{\sharp}\,\sharp$; $\quad \overline{1}\,\overline{\sharp} \to \overline{1}\,I\,\hat{\sharp}$;
$\overline{1}\,I \to I\,\overline{0}$; $\quad \overline{0}\,I \to \overline{1}\,R$; $\quad \hat{1}\,I \to \hat{1}\,\overline{0}\,R$; $\quad R\,\overline{0} \to \overline{0}\,R$; $\quad R\,\hat{\sharp} \to \overline{\sharp}\,\sharp$;
$\overline{0} \to 0$; $\quad \overline{1} \to 1$; $\quad \hat{1} \to 1$; $\quad \overline{\sharp} \to \sharp$.

Gramatika postupně prochází všechna přirozená čísla, dokud nedeterministicky nepřejde od „dvojníků“ k odpovidajícím terminálům.

Neterminál $\hat{\sharp}$ je možno odstranit jedině za předpokladu, že úspěšně skončil „podprogram“ na zvýšení čísla o 1. Takový podprogram je možno spustit jedině za předpokladu, že na „$bu$“ rozhraní je neterminál $\overline{\sharp}$, tedy až po doběhnutí „předchozího podprogramu“. $\hat{1}$ slouží pro odlišení začátku slova.

3) Porovnejte jazyky přijímané dvoucestnými nedeterministickými zásobníkovými automaty s jazyky přijímanými (jednocestnými) nedeterministickými zásobníkovými automaty:

Jedna inkluze je triviální, druhá neplatná, protože existuje dvoucestný zásobníkový automat přijímající jazyk $0^n1^n2^n$. O tomto jazyce víme (pumping lemma), že není bezkontextový. Není tedy přijímaný „jednocestnými“ nedeterministickými zásobníkovými automaty.

Nástin programu:

V první fázi automat zkontroluje, že slovo začíná $0^n1^n2$. To zvládne průchodem doprava s tím, že nadbytek počtu přečtených nul nad jedničkami eviduje hloubkou zásobníku. Po této fázi se automat vrátí za poslední 0 původního úseku. Nakonec zkontroluje, že zbytek slova je tvaru $1^n2^n$. To zvládne analogicky průchodem doprava s tím, že nadbytek počtu přečtených jedniček nad dvojkami eviduje hloubkou zásobníku.

4) Popište regulárním výrazem jazyk slov nad abecedou $\{0,1\}$ obsahujících sudý počet nul, kde za každou jedničkou bezprostředně následuje nula:
Například $((1+\lambda)0(1+\lambda)0)^\star$. Metodický a zároveň neúnosně zdlouhavý postup naznačuje Kleeneho věta: Příslušný automat:

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\leftrightarrow \lambda$ | $0$ | $1$ |
| $0$ | $\lambda$ | $01$ |
| $1$ | $0$ | $F$ |
| $01$ | $\lambda$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

Jemu odpovídající matice regulárních jazyků, potřebných k výpočtu $M^\star_{\lambda,\lambda}$ na základě vzorce $M^{k+1}_{i,j} = M^k_{i,j} + M^k_{i,v_k}\left(M^k_{v_k,v_k}\right)^\star M^k_{v_k,i}$. Řádek $v_k$ můžeme odstranit, pokud $v_k$ není počáteční stav. Sloupec $v_k$ můžeme odstranit, pokud $v_k$ není koncový stav.

$$M^0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & & \\ 0 & \lambda & & 1 & \\ & 0 & \lambda & & 1 \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda+0+1 \end{pmatrix} \qquad M^1_{(F)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & \\ 0 & \lambda & & 1 \\ & 0 & \lambda & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad M^2_{(01)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0+10 & \lambda & \\ & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$M^3_{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0+10 \\ 0+10 & \lambda \end{pmatrix}$$

Hledaný regulární výraz odpovídá $M^\star_{\lambda,\lambda} = \left(M^4_{(0)\lambda,\lambda}\right)^\star = \left((0+10)(0+10)\right)^\star$.